
EU VET - M test - priprema

- Odjel: III - c ekonomski tehničari -

Zadatak 1 *Riješi eksponencijalne jednačbe:*

- a) $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$
- b) $3 \cdot 2^x - 2^{x-1} = 20$
- c) $5 \cdot 3^{2x-1} + 9^x = 8$
- d) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$
- e) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$
- f) $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 155$
- g) $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-3} = 15$
- h) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$

Primjer Riješi eksponencijalnu jednadžbu

$$2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-3} = 15$$

Rješenje $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-3} = 15$

$$2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-3} = 15$$

$$2^x \cdot 2^{-1} + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-2} + 5 \cdot 2^x \cdot 2^{-3} = 15$$

$$2^x \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{8} = 15$$

$$2^x \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \right) = 15$$

$$2^x \cdot \frac{15}{8} = 15 \quad \bigg/ \cdot \frac{8}{15}$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Zadatak 2 *Riješi eksponencijalne jednačbe svođenjem na kvadratnu:*

a) $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$

b) $5^{2x+1} + 6 = 31 \cdot 5^x$

c) $4^x - 2^{x+1} = 3$

d) $3^{2x} - 3^x = 3$

e) $9^x - 3^{x+1} = 4$

f) $7^{2x} - 7^{x-2} = 1$

g) $9^{x-3} - 3^{x-2} + 2 = 0$

h) $36^x = 3^{x+2} \cdot 2^x - 18$

Rješenje $4^x - 2^{x+1} = 3$

$$(2^2)^x - 2^x \cdot 2 = 3$$

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$$

$$2^x = w$$

$$w^2 - 2w - 3 = 0$$

$$w_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$w_1 = -1; w_2 = 2$$

$$2^x = w_1 \Rightarrow 2^x = -1 \text{ nemoguće}$$

$$2^x = w_2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Zadatak 3.- Logaritmi - primjena

Zadatak 3 *Nađi x ako je:*

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \log x = \frac{1}{2} \log a - \log b & \text{b)} \quad \log x = 2 \log a - \frac{1}{2} \log b \\ \text{c)} \quad \log x = 2 - 2 \log (a - b) & \text{d)} \quad \log x = \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log b \\ \text{e)} \quad \log x = 3 \log (a + b) - \frac{1}{2} & \text{f)} \quad \log x = \frac{1}{2} \log a - \log b - 1 \end{array}$$

Pravila za logaritme Za dva logaritma iste baze vrijedi:

$$1. \log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

$$2. \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$3. \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Primjer $\log x = \frac{1}{2} \log a - \log b$

$$\log x \stackrel{(3)}{=} \log a^{\frac{1}{2}} - \log b$$

$$\log x \stackrel{(2)}{=} \log \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b}$$

$$x = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{b}$$

Primjer2 $\log x = \frac{1}{2} \log a - \log b - 2 \log c$

$$\log x \stackrel{(3)}{=} \log a^{\frac{1}{2}} - \log b - \log c^2$$

$$\log x \stackrel{(2)}{=} \log \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b} - \log c^2$$

$$\log x \stackrel{(2)}{=} \log \frac{a^{\frac{1}{2}}}{bc^2}$$

$$x = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{bc^2} = \frac{\sqrt{a}}{bc^2}$$

Zadatak 4 *Pojednostavi izraze:*

$$\begin{array}{ll} a) \frac{\log 225}{\log 3 + \log 5} & b) \frac{2 \log 2 + \log 7}{1 + \log 2,8} \\ c) \frac{\log 5 - \log 2}{\log 6,25} & d) \frac{\log \sqrt[3]{9}}{\log 4 - \log 12} \end{array}$$

Primjer $\frac{\log 225}{\log 3 + \log 5}$

$$\begin{array}{l} \frac{\log 225}{\log 3 + \log 5} \stackrel{(1)}{=} \frac{\log 15^2}{\log (3 \cdot 5)} \stackrel{(3)}{=} \frac{2 \log 15}{\log 15} = 2 \\ \frac{2 \log 2 + \log 7}{1 + \log 2,8} \stackrel{(3,1)}{=} \frac{\log (2^2 \cdot 7)}{\log 10 + \log 2,8} \stackrel{(1)}{=} \frac{\log 28}{\log 28} = 1 \end{array}$$

Zadatak 4.- Logaritamska jednadžba

Zadatak 5 *Riješi logaritamske jednadžbe:*

a) $\log(x - 1) + \log(x - 2) = 2 \log(x - 3)$

b) $\log x + \log(x - 3) = 1$

c) $\log(x - 2) + \log(x + 2) = 2 \log(x - 1)$

d) $\log(2x - 1) - \log(x + 2) = \log(x - 2)$

e) $\log(3x - 5) - \frac{1}{2} \log(x + 1) = 1 - \log 5$

d) $\log(3x - 2) - 2 = \frac{1}{2} \log(x + 2) - \log 50$

Zadatak 5.- Logaritamska jednadžba

Zadatak 6 *Riješi logaritamske jednadžbe svođenjem na kvadratnu:*

- a) $\frac{3}{\log x - 1} = 1 + \log x$
- b) $\frac{2 \log x}{\log x - 1} - \log x = \frac{2}{\log x - 1}$
- c) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$
- d) $\frac{1}{5 - 4 \log x} + \frac{4}{1 + \log x} = 3$
- e) $\log^2 x + 2 \log (0,1x) = 1$
- d) $\log^2 x - 2 \log (10x) = 6$

Zadatak 6.- Opseg trokuta

Zadatak 7 *Izračunaj opseg trokuta ako su mu vrhovi točke:*

- 1) $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$
- 2) $A(1, 0), B(-3, -3), C(9, -8)$
- 3) $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$
- 4) $A(1, -1), B(3, 2) \text{ i } C(-2, 3)$

Primjer Izračunaj opseg trokuta ako su mu vrhovi u točkama $A(1, -1), B(3, 2) \text{ i } C(-2, 3)$.

$$\begin{aligned}\text{formula : } |T_1T_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ |AB| &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ |AC| &= \sqrt{(-5 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37} \\ |BC| &= \sqrt{(-5 - 3)^2 + (3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-8)^2 + 0} = \sqrt{64} = 8 \\ O &= |AB| + |AC| + |BC| = \sqrt{5} + \sqrt{37} + 8\end{aligned}$$

Zadatak 7.- Oblici jednadžbe pravca

Zadatak 8 *Jednadžbu pravca datu u jedno obliku prevedi u ostala dva:*

1) $5x - y + 3 = 0$ u eksplicitni i segmentni

2) $2x + 3y - 6 = 0$ u eksplicitni i segmentni

3) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ u opći i segmentni

4) $y = 2x - 4$ u opći i segmentni

5) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ u opći i eksplicitni

6) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ u opći i eksplicitni

♣ Jednadžba pravca kroz dvije točke ♣

Ako su $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ dvije točke nekog pravca tada je jednadžba tog pravca data sa

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Zadatak 8. - Jednadžba pravca kroz dvije i jednu točku

Zadatak 9 *Odredi jednadžbe pravaca koji sadrže stranice trokuta :*

- 1) $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$
- 2) $A(1, 0), B(-3, -3), C(9, -8)$
- 3) $A(-2, 1), B(-1, -1), C(1, 2)$
- 4) $A(-1, -1), B(1, 2), C(1, 9)$

Primjer Odredi jednačbe pravaca koji sadrže stranice trokuta $A(1, 4), B(3, 3), C(-5, 3)$. Tri puta ćemo primijeniti gornju formulu

$$\begin{aligned}
 p(A, B) \quad y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\
 y - 4 &= \frac{3 - 4}{3 - 1} (x - 1) \\
 y &= \frac{-1}{2} (x - 1) + 4 \\
 y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 4 \\
 y &= -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(B, C) \quad y - 3 &= \frac{3 - 3}{-5 - 3} (x - 3) \\
 y - 3 &= \frac{0}{-8} (x - 3) \\
 y - 3 &= 0 \cdot (x - 3) \\
 y &= 3
 \end{aligned}$$

$$p(A, C) \quad y - 4 = \frac{3 - 4}{-5 - 1} (x - 1)$$

$$y = \frac{-1}{-6} (x - 1) + 4$$

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + 4$$

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + 4$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{23}{6}$$

Zadatak 9. - Kut između dva pravca

Zadatak 10 *Odredi kut između pravaca:*

$$\begin{array}{l} 1) \quad 3x + 4y - 25 = 0 \\ \quad \quad 4x + 3y - 25 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \quad 5x - y - 8 = 0 \\ \quad \quad 3x + 2y + 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \quad 2x - 3y + 11 = 0 \\ \quad \quad 3x - y + 5 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \quad -3x - 2y + 4 = 0 \\ \quad \quad 3x - 4y - 8 = 0 \end{array}$$

Primjer Označimo s φ kut između ovih pravaca:

$$-3x - 2y + 4 = 0$$

$$2y = -3x + 4$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

$$k_1 = -\frac{3}{2}$$

$$3x - 4y - 8 = 0$$

$$4y = 3x - 8$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

$$k_2 = \frac{3}{4}$$

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$\tan \varphi = \left| \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{9}{8}} \right|$$

$$\tan \varphi = \left| \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{1}{8}} \right| = |-18| = 18$$

$$\varphi = \arctan 18 = 86^\circ 49' 13''$$

♣ uvjet paralelnosti dva pravca ♣

Paralelni pravci $p_1 \dots y = k_1x + l_1$ i $p_2 \dots y = k_2x + l_2$
imaju jednake koeficijente smjerova, tj. vrijedi
 $k_1 = k_2$.

Zadatak 10. - Uvjet paralelosti i okomitosti

Zadatak 11 *Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $M(-4, 1)$ i paralelan je pravcu $p \dots 2x - y + 3 = 0$.*

Rješenje *Pravac koji tražimo neka je q . Odredimo koeficijent smjera pravca p tako što ćemo ga prevesti u eksplicitni oblik:*

$$y = 2x + 3 \Rightarrow k_p = 2$$

Koeficijent smjera pravca q jednak je $k_q (= k_p) = 2$ jer su paralelni i točka $M(-4, 1)$ je točka tog pravca. Iz jednadžbe pravca kroz jednu točku imamo

$$y - y_M = k_q (x - x_M)$$

$$y - 1 = 2 \cdot (x + 4)$$

$$y = 2x + 8 - 1$$

$$y = 2x + 7 \quad : \text{eksplicitni oblik ili}$$

$$q \dots 2x - y + 7 = 0 \quad \text{opći oblik}$$

Zadatak 12 *Identičan postupak i identičan tekst i za ostale zadatke.*

- 1) $M(-4, 1), p \dots 2x - y + 3 = 0$
- 2) $M(2, -3), p \dots 2x + 3y - 2 = 0$
- 3) $M(-2, -3), p \dots 3x - y + 5 = 0$
- 4) $M(1, -2), p \dots 5x - y + 3 = 0$

♣ uvjet okomitosti dva pravca ♣

Za koeficijente smjerova **okomitih pravca**
 $p_1 \dots y = k_1 x + l_1$ i $p_2 \dots y = k_2 x + l_2$ vrijedi
 $k_1 \cdot k_2 = -1$ tj. vrijedi

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \text{ kao i } k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

.

Zadatak 13 *Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $N(3, 1)$ i normalan je na pravcu $p \dots 2x - 3y + 1 = 0$.*

Rješenje *Pravac koji tražimo neka je q . Odredimo koeficijent smjera pravca p tako što ćemo ga prevesti u eksplicitni oblik:*

$$\begin{aligned} 3y &= 2x + 1 \quad \text{---} : 3 \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow k_p = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Koeficijent smjera pravca q jednak je

$$k_q = -\frac{1}{k_p} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Za pravac q znamo sada koeficijent smjera i jednu točku $N(-2, 2)$ pa iz jednadžbe pravca kroz jednu točku imamo

$$y - y_N = k_q (x - x_N)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 3 + 2$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 1 \quad : \text{eksplicitni oblik ili}$$

$$q \dots 3x + 2y + 2 = 0 \quad \text{opći oblik}$$

Zadatak 14 Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom N i normalan je na pravcu p

- 1) $N(3, 1), p \dots x - y + 1 = 0$
- 2) $N(-2, 2), p \dots 2x - 3y + 1 = 0$
- 3) $N(2, -3), p \dots 3x - y + 5 = 0$
- 4) $N(-1, -2), p \dots 5x - y + 3 = 0$